SESSION DE 1998

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (B10)

Sujet commun aux ENS d'Ulm, Lyon et Cachan

DURÉE : 3 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Les candidats sont expressément invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

On désignera par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. On fixe un entier naturel $r \in \mathbf{N}$ supérieur ou égal à 2. On désignera par $M_r(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre r à coefficients réels.

1] Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r} \in M_r(\mathbf{R})$.
a) Montrer que si $W = (w_1, \ldots, w_r)$ est un vecteur ligne de $\mathbf{R}^r$ alors le produit matriciel WM est un vecteur ligne de $\mathbf{R}^r$ dont on précisera les composantes.
b) Montrer que si Y est un vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_r \end{pmatrix}$$

alors le produit matriciel MY est un vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$ dont on précisera les composantes.

On considère un ensemble fini Ω muni d'une loi de probabilité P et $S = \{s_1, \ldots, s_r\}$ une partie à r éléments de $\mathbf{R}$. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on se donne une variable aléatoire $X_n : \Omega \mapsto S$ (à valeurs dans S). On suppose dans la suite que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie les deux propriétés suivantes notées **A]** et **B]**.

A] Pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et tout $(u_0, \ldots, u_n) \in S^{n+1}$, la probabilité pour que $X_n = u_n$ sachant que $X_0 = u_0, X_1 = u_1, \ldots, X_{n-1} = u_{n-1}$ est égale à la probabilité pour que $X_n = u_n$ sachant que $X_{n-1} = u_{n-1}$. En d'autres termes on suppose que

$$P(X_n = u_n | X_0 = u_0, X_1 = u_1, \ldots, X_{n-1} = u_{n-1}) = P(X_n = u_n | X_{n-1} = u_{n-1})$$

B] Il existe une matrice $M = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r} \in M_r(\mathbf{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ on ait :

$$P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) = p_{i,j}$$

Dans la suite, pour chaque entier naturel $n > 0$, on désignera par M^n la matrice obtenue en effectuant n fois le produit de M avec elle-même; et on notera $M^n = (p_{i,j}(n))_{1 \leq i,j \leq r}$. On conviendra que M^0 désigne la matrice identité. Enfin, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on désignera par μ_n la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

2] a) Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$. Calculer $\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}$. Puis calculer $\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}(n)$ pour chaque entier $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

b) On considère des sous-ensembles $A_1, \ldots, A_m$ de Ω (c'est-à-dire des évènements) tels que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_m) > 0$. Exprimer alors $P(A_1 \cap \ldots \cap A_m)$ en fonction de

$$P(A_1),\ P(A_2|A_1),\ P(A_3|A_1 \cap A_2),\ \ldots,\ P(A_m|A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1})$$

c) Soit m un entier naturel positif. On considère une application $j \mapsto \sigma(j)$ de $\{1, \ldots, m\}$ dans $\{1, \ldots, r\}$. Exprimer $P(\{X_1 = s_{\sigma(1)}, \ldots, X_m = s_{\sigma(m)}\})$ en fonction de $P(\{X_1 = s_{\sigma(1)}\})$ et de

$$p_{\sigma(1),\sigma(2)},\ p_{\sigma(2),\sigma(3)},\ \cdots,\ p_{\sigma(m-1),\sigma(m)}$$

d) Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $j \in \{1, \ldots, r\}$. Exprimer $\mu_n(\{s_j\})$ en fonction des nombres réels suivants:

$$\mu_{n-1}(\{s_h\}),\quad p_{k,l},\quad h, k, l \in \{1, \ldots, r\}$$

(On pourra utiliser la formule de ~~Bayes~~ des probabilités totales). Donner une interprétation matricielle de ce résultat. En déduire, en utilisant une récurrence, une expression de $\mu_n(\{s_j\})$ en fonction des nombres réels suivants:

$$\mu_0(\{s_h\}),\quad p_{k,l}(n),\quad h, k, l \in \{1, \ldots, r\}$$

3] On rappelle que $r \geq 2$. On suppose dans les questions **3]**, **4]**, **5]** et **6]** que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ $p_{i,j} > 0$.

a) On pose $d = \min_{1 \leq i,j \leq r} p_{i,j}$. Prouver, en utilisant la question **2] a)**, que $0 < d \leq \frac{1}{2}$.

Pour chaque vecteur colonne Z de $\mathbf{R}^r$:

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ z_r \end{pmatrix}$$

on pose $\min Z = \min_{1 \leq j \leq r} z_j$ et $\max Z = \max_{1 \leq j \leq r} z_j$.

b) Soit Z un vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$ tel que $\min Z \geq 0$. Comparer $\min MZ$ et $d \max Z$.

4] On fixe un vecteur colonne Y de $\mathbf{R}^r$:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r \end{pmatrix}$$

a) Comparer $\min MY$ et $d \max Y + (1-d) \min Y$. On introduira le vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$:

$$\begin{pmatrix} y_1 - \min Y \\ y_2 - \min Y \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r - \min Y \end{pmatrix}$$

b) Comparer $\max MY$ et $d \min Y + (1-d) \max Y$.
c) Déduire des deux questions précédentes une majoration simple de $\max MY - \min MY$ en fonction de $(1-2d)$ et de $(\max Y - \min Y)$.

5] a) Soit n un entier naturel > 0. Déduire de la question précédente une majoration simple de $\max M^n Y - \min M^n Y$ en fonction de n, $(1-2d)$ et de $(\max Y - \min Y)$ (On pourra procéder par récurrence sur n).
b) Etablir que les suites $(\max M^n Y)_{n>0}$ et $(\min M^n Y)_{n>0}$ sont monotones. On précisera pour chacune d'elles le sens de la monotonie (croissante ou décroissante au sens large).

On note pour chaque entier naturel $n > 0$:

$$M^n Y = \begin{pmatrix} y_1(n) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r(n) \end{pmatrix}$$

les composantes du vecteur colonne $M^n Y$.

c) Etablir qu'il existe un réel $z \in \mathbf{R}$ tel que:

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\}, \quad \lim_{n \to +\infty} y_i(n) = z$$

6] **a)** Déduire de ce qui précède qu'il existe $(w_1, \ldots, w_r) \in \mathbf{R}^r$ tel que:

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, r\}, \quad \lim_{n \to +\infty} p_{i,j}(n) = w_j$$

b) Déterminer $\sum_{j=1}^{r} w_j$.
c) Avec les notations de la question **6] a)**, on note $W = (w_1, \ldots, w_r)$ le vecteur ligne de $\mathbf{R}^r$ de composantes $w_1, \ldots, w_r$. Exprimer le vecteur ligne WM en fonction de W. (On pourra considérer les matrices $M^n M$ pour $n \in \mathbf{N}^*$).
d) Déterminer l'ensemble des vecteurs lignes de $\mathbf{R}^r$:

$$Z = (z_1, \ldots, z_r)$$

tels que $\sum_{i=1}^{r} z_i = 1$ et $ZM = Z$. (On pourra utiliser la question **6] a)**).

7] Maintenant on ne suppose plus nécessairement que les $p_{i,j}$ soient tous *strictement* positifs, mais on fait l'hypothèse qu'il existe un entier naturel strictement positif N tel que les coefficients $p_{i,j}(N)$ de la matrice $M^N = (p_{i,j}(N))_{1 \leq i,j \leq r}$ soient tous strictement positifs.
a) Existe-t-il $(w_1, \ldots, w_r) \in \mathbf{R}^r$ tel que:

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, r\}, \quad \lim_{n \to +\infty} p_{i,j}(n) = w_j \ ?$$

(On observera que le résultat de la question **4] c)** est encore valable avec $d = 0$).

b) Déterminer l'ensemble des vecteurs lignes de $\mathbf{R}^r$:

$$Z = (z_1, \ldots, z_r)$$

tels que $\sum_{i=1}^{r} z_i = 1$ et $ZM = Z$.

c) Déterminer l'ensemble des vecteurs colonnes de $\mathbf{R}^r$:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r \end{pmatrix}$$

tels que $\sum_{j=1}^{r} y_j = 1$ et $MY = Y$. (On pourra utiliser la question **6] a)**).

8] Dans cette question on suppose que M est une matrice $(3,3)$ égale à:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'ensemble des vecteurs lignes $W = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbf{R}^3$ tels que $\sum_{j=1}^{3} w_j = 1$ et $WM = W$.
b) Déterminer pour chaque $(i, j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$:

$$\lim_{n \to +\infty} p_{i,j}(n)$$